e^ix = cos(x) + isin(x).

Esta es la fórmula de Euler, y nos dice que e^ix, la exponencial imaginaria, es un número complejo de parte real cos(x) y parte imaginaria sin(x). Este número tiene módulo 1, por lo que se encuentra en la circunferencia unitaria, y además su ángulo es x.

Pero, ¿por qué esta fórmula es cierta? ¿Qué significa elevar a un exponente imaginario, y por qué todo esto tiene sentido?

La demostración más conocida de la fórmula de Euler, usa algo llamado “series de Taylor”. Pero esta demostración es algo complicada, poco intuitiva, y no aclara mucho por qué la fórmula tiene sentido.

Este video va a ser diferente. Voy a dar dos explicaciones de por qué la fórmula de Euler es cierta: una desde el punto de vista de la exponencial compleja, y otra desde el punto de vista de la función cos(x) + isin(x). A través de estas explicaciones vamos a entender la profunda conexión entre las exponenciales y las funciones trigonométricas.

Para no alargar demasiado este video, voy a asumir que tienes un conocimiento básico de exponenciales, trigonometría y números complejos, sobre todo la propiedad de que al multiplicar dos números complejos, sus módulos se multiplican y sus ángulos se suman para formar el producto.

Sin más que agregar, les presento: la fórmula de Euler explicada.

**PARTE 1: E^(IX)**

La exponencial e^x se define como “el límite de (1 + x/n), todo a la n, cuando n tiende a infinito”.

Esto representa un número muy cercano a 1, multiplicado por sí mismo muchas veces hasta obtener un número diferente.

Aquí puedes ingresar cualquier número real x y obtener un valor. Si x es positivo, el valor se aleja del origen. Pero si x es negativo, se acerca al origen. Así funciona la exponencial real.

Pero, ¿por qué conformarnos solo con los reales? Esta expresión también da para ingresar números complejos, y sigue representando un número muy cercano a 1, elevado a un número muy grande, pero ahora el resultado es complejo.

Así, podemos definir la exponencial para exponentes complejos: la exponencial compleja. Lo mejor de todo, es que se conservan casi todas las propiedades que tenía la exponencial real.

Un número z se puede escribir como a + bi, donde a es su parte real y b su parte imaginaria. Entonces e^z = e^(a+bi), que se descompone en (e^a)(e^bi). Así, la exponencial compleja se factoriza en una exponencial real, que ya sabemos cómo funciona, y una exponencial imaginaria, que es lo que nos interesa ahora: ¿Qué pasa cuando ponemos un número imaginario ix en esta expresión?

Primero analicemos (1 + ix/n), un número muy cercano a 1 con un pequeño desplazamiento hacia arriba. Al multiplicarlo por sí mismo, su módulo se multiplica con su módulo y su ángulo se suma con su ángulo. Si repites esto n veces, el resultado va rotando alrededor del origen.

El módulo de (1 + ix/n)^n es cercano a 1, y se puede demostrar que en el límite, cuando n tiende a infinito, el módulo final tiende a 1.

Así que e^ix representa una rotación alrededor del origen, sin alejarse ni acercarse a este. Pero, ¿cuál es el ángulo de esta rotación? Podemos averiguarlo calculando el arco de circunferencia que recorre este número.

Fíjate que la distancia entre 1 y 1 + ix/n es este segmento de largo x/n. Ahora, si el módulo de todas estas potencias es 1, ninguna de estas distancias entre potencias cambia su largo, así que todas miden x/n. La longitud del arco es la suma de estos n segmentos, que es exactamente x.

Entonces, teniendo el radio de la circunferencia y el arco recorrido, podemos encontrar el ángulo del número. Si estás usando radianes, el ángulo también es x, por lo que e^ix es un número de módulo 1 y ángulo x radianes. En su forma polar, e^ix sería entonces igual a cos(x) + isin(x).

Esta es la fórmula de Euler.

---

Mientras la exponencial real e^a nos aleja o acerca al origen, la exponencial imaginaria e^bi nos hace rotar alrededor del origen en un ángulo de b radianes, siendo igual a cos(b) + isin(b). Por ende, una exponencial compleja e^(a+bi) combina ambas acciones: rotar alrededor del origen, y a la vez alejarse o acercarse a este.

**PARTE 2: COS(X) + ISIN(X)**

La función cos(x) + isin(x) representa un número complejo cuyo módulo es 1, es decir, se encuentra en la circunferencia de radio 1 centrada en el origen. Además, su ángulo es x. Como esta función se usa un montón, suele abreviarse como cis(x).

Esta función tiene dos propiedades importantes: si tenemos dos números cis(x) y cis(y), y los multiplicamos, su producto tiene módulo 1\*1, que es 1, y ángulo x+y. Este nuevo número se expresa como cis(x+y). Entonces cis(x)\*cis(y) = cis(x+y).

Por otra parte, cis(0), que se refiere al número de módulo 1 y ángulo 0, es justo el número 1.

Y aquí viene lo sorprendente: ambas propiedades son precisamente las que definen a una exponencial: b^(x+y) = (b^x)(b^y), y b^0 = 1. De estas dos propiedades de la función cis, se pueden deducir estas otras [[mostrar en video]], que también las tienen las exponenciales. Así, podemos concluir que “LA FUNCIÓN CIS(X) ES UNA EXPONENCIAL”. Y es que la idea de que al multiplicar dos números complejos se sumen sus ángulos, es similar a la idea de que al multiplicar dos exponenciales se sumen sus exponentes.

Entonces, podemos expresar cis(x) como una exponencial b^(kx), donde el exponente de alguna forma nos entrega información sobre el ángulo de un complejo. Tiene sentido, porque si, por ejemplo tenemos cis(y), y lo expresamos como b^(ky), al multiplicar ambos números, se suman los exponentes que representan los ángulos.

Por ejemplo, podemos analizar las potencias de i. Multiplicar por i representa una rotación en 90°. i², son dos rotaciones en 90°, o sea 180°, que corresponde a -1. i³ son 3 rotaciones en 90°, y así. En general i^n representa rotar n veces en 90°. De cierta forma, el exponente te da información sobre el ángulo final. Ahora, si rotas 3 veces y luego otras 2, es lo mismo que rotar 5 veces en total. Esto se puede representar como tomar i³ y multiplicarlo por i², y por reglas de exponenciales se suman los exponentes, 2 y 3, para dar como resultado i⁵. Es decir, los exponentes, que representan ángulos, se suman.

Ahora que entendemos el concepto de que cis(x) es una exponencial, ¿cuál es esta exponencial? Podríamos usar el ejemplo de antes, e igualar cis(x) a i^(kx). Trabajando en radianes, cuando el ángulo x es igual a pi/2, tenemos i^kpi/2 que debería ser igual a i, o i¹. Por ende, k debe ser igual a 1 / (pi/2). Así que cis(x) sería igual a i^[x/(pi/2)], y tendría sentido. cis(pi/2) es igual a i¹, cis(pi) es igual a i² que es -1, y así.

Pero si ingresas el ángulo x = pi/4, o 45°, por la derecha nos queda i^(1/2), un número que al cuadrado nos da i. Pero hay dos números que cumplen eso, y son estos de acá. Y eso es un problema, porque cis(pi/4) nos da un único resultado: el número de ángulo pi/4, o 45°. Entonces, cis(pi/4) no es igual a i^(½).

En general, si el exponente no es entero, existen múltiples resultados. Solo cuando el exponente es entero, existe un único resultado. Pero esto nos deja solo con 4 puntos en la circunferencia. Mientras tanto, cis(x) puede abarcar todos los puntos. ¿Hay alguna forma de que la exponencial abarque más puntos?

Las potencias de i abarcan solo 4 puntos, porque i tiene un ángulo de 90°, el cual cabe 4 veces en la circunferencia completa de 360°. Pero un número con un ángulo más pequeño cabe más veces: un ángulo de 60° cabe 6 veces, así que una exponencial con base cis(60°) abarca 6 puntos. En cambio, un ángulo de 45° cabe 8 veces. En general, un ángulo theta cabe

Ahora, la idea es tener la mayor cantidad posible de puntos, así que podemos ir achicando cada vez más el ángulo de nuestro número. La idea es que si tienes un número en esta circunferencia con un ángulo infinitamente pequeño, sus potencias cubrirían una cantidad infinitamente grande de puntos, y eso es justo lo que queremos.

Entonces, el número que necesitamos es cis de un ángulo infinitamente pequeño que llamaremos omega. Como cis es coseno más iseno, podemos hacer algunas aproximaciones. Por ejemplo, si miramos muy cerca, nos daremos cuenta que el seno de omega, un ángulo muy pequeño, mide casi lo mismo que el arco abarcado por omega. Si nuestros ángulos están en radianes, ese arco mide exactamente omega. Así que podemos hacer la aproximación “sen(omega) aproximadamente igual a omega” cuando omega es un ángulo muy pequeño, y esto se hace más exacto a medida que omega sea más pequeño. Por otra parte, el coseno de un ángulo muy pequeño es prácticamente igual a 1. Así, cis(omega), que no es nada más que cos(omega) + isen(omega), es aproximadamente igual a 1 + i\*omega, cuando omega es un ángulo muy pequeño.

Con eso en mente, para obtener cualquier número en esta circunferencia, solo hay que elevar nuestro cis(omega) a un número entero lo suficientemente grande.

Si lo elevamos a un entero n, el resultado es un número de ángulo n\*omega. Si queremos obtener un ángulo en especial, digamos “x”, tenemos que escoger nuestros valores de n y de omega, de manera que n\*omega = x. Una manera sería despejar n y obtener que debe ser igual a x / omega. Entonces nuestro cis(omega) lo elevamos a x/omega, y en teoría obtenemos cis((x/omega) \* omega), o sea cis(x). Pero recordemos que esto solo funciona si nuestro exponente es un número entero, y como x y omega son números reales, no podemos asegurar que esta fracción dé un entero. Así que es complicado llegar e intentar despejar n de esta relación. En vez de eso, una mejor idea sería despejar omega, y obtener que debe ser igual a x/n, donde exigimos que n sea un entero. Ahora, en vez de tener un ángulo omega cualquiera, tenemos un ángulo x/n, la eneava parte de cierto ángulo x, donde n es un número entero muy grande. Si elevamos este cis(x/n) a n, terminamos recuperando nuestro cis(x) original. Ahora, si n tiende a infinito, el ángulo x/n tiende a 0, así que podemos hacer nuestras aproximaciones: sin(x/n) = x/n, y cos(x/n) = 1, y así decimos que cis(x/n) es aproximadamente igual a 1 + ix/n. Entonces, al elevar ambos lados a n, parece lógico que cis(x) sea aproximadamente igual a (1 + ix/n)^n, donde n tiende a infinito.

Ahora, ojo, todo este raciocinio es bien informal. Realmente nunca hemos demostrado formalmente que esto sea así, pero por ahora solo quiero que entiendas el concepto de manera intuitiva, dejando las formalidades de lado. Solo diré que esta relación sí se puede demostrar: efectivamente, cis(x) es igual al límite de esta expresión, cuando n tiende a infinito. Pero prefiero dejar las demostraciones para otro video. Ahora fíjate muy bien en esta expresión, porque es muy especial. ¿Te parece familiar?